

УДК 62-755: 62-752

Г.Б. Філімоніхін, доц., д-р техн. наук, І.І. Філімоніхіна, асистент

Кіровоградський національний технічний університет

Зрівноважування ротора з нерухомою точкою пасивними автобалансирами. Постановка задачі

Ставиться задача з визначення умов настання автобалансування при зрівноважуванні ротора з нерухомою точкою пасивним автобалансином. Виводяться диференціальні рівняння руху системи ротор-автобалансир. Класифікуються випадки, що підлягають розглядові.

автобалансир, ротор, дисбаланс, коригувальний вантаж

Для зрівноважування на ходу роторів, чий дисбаланс змінюється в процесі експлуатації, застосовуються пасивні автобалансири (АБ) [1-3]. У роботі [2] були запропоновані два наближених методи визначення критичних швидкостей системи ротор-АБ. У роботах [2,3] була показана ефективність першого методу, заснованого на критерії настання автобалансування. Цей критерій дозволяє приблизно визначати критичні швидкості системи ротор-АБ без врахування конкретного виду АБ, але з урахуванням розташування площини корекції. Тому з його допомогою одержуються узагальнені критичні швидкості, придатні для всіх типів АБ. Другий метод ґрунтується на критерії стійкості основного руху системи (у якому ротор зрівноважений або усунуте відхилення вала від осі обертання). Він дозволяє більш точно визначати критичні швидкості, оскільки враховує конкретний тип АБ і дисбаланс, що зрівноважується. У цій роботі ставиться задача по застосуванню цього критерію до ротора з нерухомою точкою, що зрівноважується пасивним АБ.

Для визначення умов настання автобалансування будемо використовувати критерій стійкості основного руху [2,3]: для стійкості основного руху системи ротор-АБ необхідно і достатньо, щоб точка на подовжній осі ротора, що знаходиться в площині корекції АБ, під дією елементарного дисбалансу, викликаного відхиленням КВ або коригувальної маси (КМ) від основного руху, відхилялася від основного руху (у відповідному усталеному русі) у середньому за один оберт ротора, протилежно векторові елементарного дисбалансу:

$$\bar{r}_{De} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{e}(\varphi) \cdot \Delta \bar{r}_D(\varphi) d\varphi = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \bar{e}(t) \cdot \Delta \bar{r}_D(t) dt < 0, \quad (1)$$

де $\Delta \bar{r}_D$ - відхилення від основного руху точки D , викликане елементарним дисбалансом \bar{s} , спрямованим як вектор \bar{e} ;

\bar{r}_{De} - усереднена за один оберт ротора проекція вектора $\Delta \bar{r}_D$ на напрямок \bar{e} ;

φ - кут повороту ротора;

ω - кутова швидкість обертання ротора;

t - час.

На рис. 1, а показана схема ротора з нерухомою точкою на несиметричних (анізотропних) в'язко-пружних опорах. Впливом сил ваги будемо нехтувати.

Припускаємо, що в основному русі системи АБ певного типу усунув відхилення вала від осі обертання. При цьому точка D рухається за законом $\bar{r}_{D0}(t) = 0$. Відповідно до критерію розглядаємо ротор - 1, дисбаланс - 2 і КВ - 3 як одне тверде ціле (рис. 1, б). При цьому утвориться деякий складений ротор, з новими масо-інерційними характеристиками.

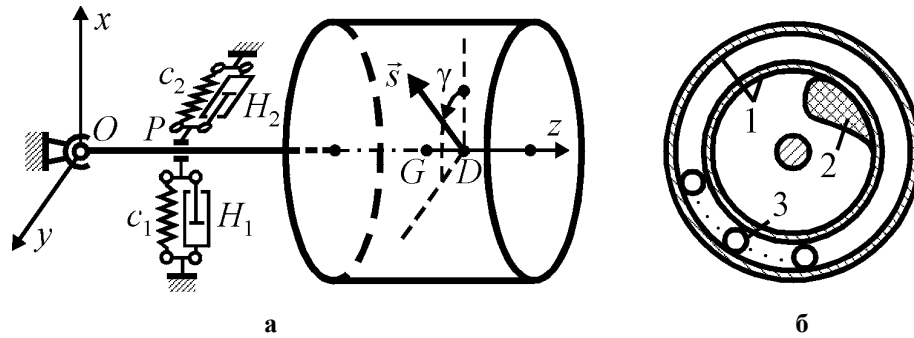


Рисунок 1 – Схема ротора з нерухомою точкою

Площина корекції АБ знаходиться на відстані $d = |OD|$ від нерухомої точки. Дисбаланс, що зрівноважується, може бути статичним, моментним або динамічним, причому площина статичного дисбалансу може не збігатися з площиною корекції АБ. Через елементарне відхилення КВ від основного руху виникає елементарний дисбаланс \vec{s} , що знаходиться в площині корекції АБ і виходить із точки D . У загальному випадку напрямок цього дисбалансу в площині корекції довільний, тому для визначення цього напрямку введемо кут $\gamma \in [0, 2\pi)$. Під дією дисбалансу точка D відхилиться від осі обертання системи і в усталеному русі буде рухатися за періодичним законом $\vec{r}_D(t)$. Вектор елементарного дисбалансу також буде змінюватися за періодичним законом $\vec{s}(t)$. Оскільки $\Delta \vec{r}_D = \vec{r}_D - \vec{r}_{D_0} = \vec{r}_D$, то математично критерій стійкості основного руху (1) запишеться в наступному вигляді

$$\bar{r}_{De} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{e}(\varphi) \cdot \vec{r}_D(\varphi) d\varphi = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \vec{e}(t) \cdot \vec{r}_D(t) dt < 0. \quad (2)$$

Будемо складати диференціальні рівняння руху системи відносно нерухомих осей x, y, z (рис. 1). Вісь z спрямована по осі вала при відсутності обертання, а осі x, y по головних напрямках жорсткостей опор. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що в початковий момент часу система займала положення, у якому осі x, y, z - головні і відносно них осьові моменти інерції системи (складеного ротора) A, B, C розташовані в порядку зростання ($A \leq B \leq C$ - короткий або сферичний відносно точки O ротор) або спадання ($A \geq B \geq C$ - довгий відносно точки O ротор). Рух системи навколо нерухомої точки задається трьома послідовними поворотами. Для їхнього задання будемо використовувати допоміжні осі (рис. 2). Нижче приведена послідовність поворотів і відповідний перехід одних осей в інші:

$$Ox_1y_1z_1 \xrightarrow{\alpha} Ox_1y_1z_1 \xrightarrow{\beta} O\xi\eta\zeta \xrightarrow{\varphi=\omega t} Ox_2y_2z_2. \quad (3)$$

Зауважимо, що положення власної осі обертання ротора ζ задається кутами Резаля α, β і система (умовно, без врахування відносного руху КВ) має дві відповідні ступені вільності. Допоміжні осі $O\xi\eta\zeta$ виходять з осей $Ox_1y_1z_1$ після поворотів на кути Резаля, як це показано на рис. 2, а.

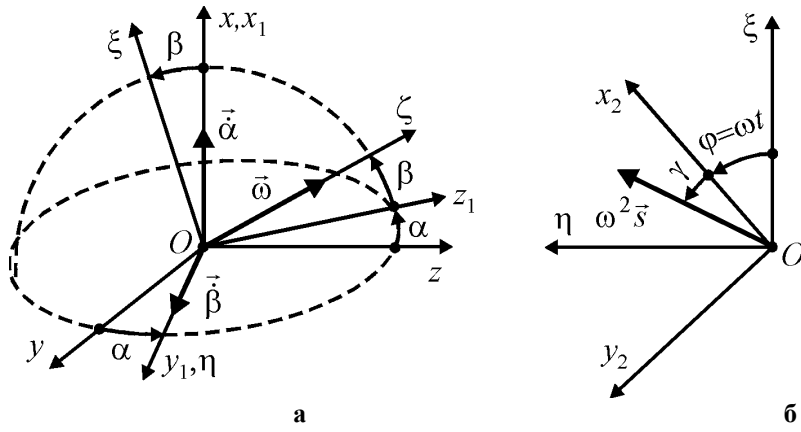


Рисунок 2 – Схема руху системи

Для одержання двох диференціальних рівнянь руху системи скористаємося теоремою про зміну моменту кількості руху системи, складеної відносно нерухомих осей x, y :

$$\frac{d}{dt} K_x = M_x^{(e)}, \quad \frac{d}{dt} K_y = M_y^{(e)}, \quad (4)$$

де K_x, K_y - моменти кількості руху системи відносно осей x, y ;

$M_x^{(e)}, M_y^{(e)}$ - головні моменти зовнішніх сил відносно осей x, y .

Рівняння (4) зручніше складати з використанням комплексних чисел:

$$\frac{d}{dt} K_O = M_O^{(e)}, \quad K_O = K_x + iK_y, \quad M_O^{(e)} = M_x^{(e)} + iM_y^{(e)}. \quad (5)$$

Визначимо спочатку \vec{K}_O в проекціях на допоміжні осі $O\xi\eta\zeta$. У проекціях на ці осі тензор інерції і вектор кутової швидкості обертання системи мають вигляд

$$J_{\xi\eta\zeta} = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & 0 \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \omega + \dot{\alpha} \sin \beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Тоді момент кількості руху системи відносно точки O у проекціях на ці осі має вигляд

$$\vec{K}_O = J_{\xi\eta\zeta} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} J_\xi - \dot{\beta} J_{\xi\eta} \\ \dot{\beta} J_\eta - \dot{\alpha} J_{\xi\eta} \\ \omega J_\zeta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Проекції цього моменту на нерухомі осі x, y :

$$K_x = K_\xi \cos \beta + K_\zeta \sin \beta \approx K_\xi + K_\zeta \beta \approx \dot{\alpha} J_\xi - \dot{\beta} J_{\xi\eta} + \beta \omega J_\zeta,$$

$$K_y = K_\eta \cos \alpha - K_\zeta \cos \beta \sin \alpha + K_\xi \sin \beta \sin \alpha \approx K_\eta - \alpha K_\zeta \approx \dot{\beta} J_\eta - \dot{\alpha} J_{\xi\eta} - \alpha \omega J_\zeta. \quad (8)$$

Оскільки

$$J_{x_2 y_2 z_2} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad J_\xi = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2\omega t, \quad J_\eta = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 2\omega t, \quad (9)$$

$$J_{\xi\eta} = -\frac{A-B}{2} \sin 2\omega t,$$

то в проекціях на осі $Oxyz$:

$$K_x \approx \dot{\alpha} \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2\omega t \right) + \dot{\beta} \frac{A-B}{2} \sin 2\omega t + \beta \omega C,$$

$$K_y \approx \dot{\beta} \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 2\omega t \right) + \dot{\alpha} \frac{A-B}{2} \sin 2\omega t - \alpha \omega C. \quad (10)$$

Введемо в розглядання комплексні змінні

$$q = \alpha + i\beta, \quad \bar{q} = \alpha - i\beta. \quad (11)$$

Тоді в комплексному вигляді

$$K_O = K_x + iK_y = \dot{q} \frac{A+B}{2} + \dot{\bar{q}} \frac{A-B}{2} e^{2i\omega t} - i\dot{q}\omega C. \quad (12)$$

З огляду на (12) знаходимо ліву частину теореми (5):

$$\frac{dK_O}{dt} = \ddot{q} \frac{A+B}{2} + \ddot{\bar{q}} \frac{A-B}{2} e^{2i\omega t} + i\dot{\bar{q}}\omega(A-B)e^{2i\omega t} - i\dot{q}\omega C. \quad (13)$$

Знаходимо праву частину теореми (5). Моменти зовнішніх сил, що діють на систему, утворюються силами, що виникають від реакцій опор і від сили, створюваної елементарним дисбалансом. Знайдемо спочатку моменти, створювані опорними реакціями. З рис.1 знаходимо вектори переміщення і швидкості точки P , у якій знаходяться опори, у проекціях на осі $Oxyz$:

$$\begin{aligned} \vec{r}_P &= (b \sin \beta, -b \sin \alpha \cos \beta, b \cos \alpha \cos \beta)^T \approx (b\beta, -b\alpha, b)^T, \\ \vec{v}_P &= \dot{\vec{r}}_P \approx (b\dot{\beta}, -b\dot{\alpha}, 0)^T, \quad b = |OP|. \end{aligned} \quad (14)$$

Сили пружності і в'язкого тертя, створювані анізотропними опорами, мають у проекціях на нерухомі осі наступний вид:

$$\vec{F}_c \approx (-c_1 b \dot{\beta}, c_2 b \dot{\alpha}, 0)^T, \quad \vec{F}_h \approx (-H_1 b \dot{\beta}, H_2 b \dot{\alpha}, 0)^T, \quad (15)$$

де $c_i, H_i, /i=1,2/$ - коефіцієнти жорсткості і демпфірування опор.

Ці сили створюють відносно осей x, y наступні моменти:

$$\vec{M}_O^{(\text{sup})} = \vec{r}_P \times \vec{F}_c + \vec{r}_P \times \vec{F}_h, \quad M_x^{(\text{sup})} = -H_2 b^2 \dot{\alpha} - c_2 b^2 \alpha, \quad M_y^{(\text{sup})} = -H_1 b^2 \dot{\beta} - c_1 b^2 \beta. \quad (16)$$

Можна показати, що через малість елементарного дисбалансу він майже не впливає на масу й осьові моменти інерції ротора і його дія виявляється тільки через відцентрові сили інерції. При малих кутах Резаля проекції на нерухомі осі складових сил і моментів, викликаних дисбалансом, приблизно визначаються так:

$$\begin{aligned} F_{Dx}^{(s)} &= s\omega^2 \cos \omega t, \quad F_{Dy}^{(s)} = s\omega^2 \sin \omega t, \\ M_x^{(s)} &= -F_{Dy}^{(s)} z_D \approx -sd\omega^2 \sin \omega t, \quad M_y^{(s)} = F_{Dx}^{(s)} z_D \approx sd\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (17)$$

З врахуванням (16), (18) знаходимо:

$$\begin{aligned} M_x^{(e)} &= M_x^{(\text{sup})} + M_x^{(s)} = -sd\omega^2 \sin \omega t - H_2 b^2 \dot{\alpha} - c_2 b^2 \alpha, \\ M_y^{(e)} &= M_y^{(\text{sup})} + M_y^{(s)} = sd\omega^2 \cos \omega t - H_1 b^2 \dot{\beta} - c_1 b^2 \beta. \end{aligned} \quad (18)$$

Введемо в розглядання узагальнені коефіцієнти жорсткості і в'язкості опор і новий параметр \tilde{s} :

$$k_1 = c_2 b^2, \quad k_2 = c_1 b^2, \quad h_1 = H_2 b^2, \quad h_2 = H_1 b^2, \quad \tilde{s} = sd\omega^2. \quad (19)$$

Тоді, у комплексному вигляді ліва частина теореми (5) має вигляд:

$$M_O^{(e)} = M_x^{(e)} + iM_y^{(e)} = i\tilde{s} e^{i\gamma} e^{i\omega t} - \frac{h_1 + h_2}{2} \dot{q} - \frac{h_1 - h_2}{2} \dot{\bar{q}} - \frac{k_1 + k_2}{2} q - \frac{k_1 - k_2}{2} \bar{q}. \quad (20)$$

З огляду на (5), (13), (20) одержимо наступні два (комплексно-спряжених) диференціальних рівняння руху системи в комплексному вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{q} \frac{A+B}{2} + \ddot{\bar{q}} \frac{A-B}{2} e^{2i\omega t} + i\dot{\bar{q}}\omega(A-B)e^{2i\omega t} - i\dot{q}\omega C + \\ + \frac{h_1 + h_2}{2} \dot{q} + \frac{h_1 - h_2}{2} \dot{\bar{q}} + \frac{k_1 + k_2}{2} q + \frac{k_1 - k_2}{2} \bar{q} = i\tilde{s} e^{i\gamma} e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\ddot{q} \frac{A+B}{2} + \ddot{\bar{q}} \frac{A-B}{2} e^{-2i\omega t} - i\dot{q}\omega(A-B)e^{-2i\omega t} + i\dot{\bar{q}}\omega C + \frac{h_1+h_2}{2} \dot{q} + \frac{h_1-h_2}{2} \dot{\bar{q}} + \frac{k_1+k_2}{2} \bar{q} + \frac{k_1-k_2}{2} q = -i\tilde{s} e^{-i\gamma} e^{-i\omega t}. \quad (21)$$

Якщо опори симетричні (ізотропні), то:

$$k_1 = k_2 = k, \quad h_1 = h_2 = h. \quad (22)$$

Відповідні диференціальні рівняння руху системи мають вигляд:

$$\ddot{q} \frac{A+B}{2} + \ddot{\bar{q}} \frac{A-B}{2} e^{2i\omega t} + i\dot{q}\omega(A-B)e^{2i\omega t} - i\dot{\bar{q}}\omega C + h\dot{q} + kq = i\tilde{s} e^{i\gamma} e^{i\omega t},$$

$$\ddot{\bar{q}} \frac{A+B}{2} + \ddot{q} \frac{A-B}{2} e^{-2i\omega t} - i\dot{q}\omega(A-B)e^{-2i\omega t} + i\dot{\bar{q}}\omega C + h\dot{\bar{q}} + k\bar{q} = -i\tilde{s} e^{-i\gamma} e^{-i\omega t}. \quad (23)$$

Якщо ротор осесиметричний, то $A = B$ і диференціальні рівняння руху системи мають вигляд:

$$\ddot{q}A - i\dot{q}\omega C + \frac{h_1+h_2}{2} \dot{q} + \frac{h_1-h_2}{2} \dot{\bar{q}} + \frac{k_1+k_2}{2} q + \frac{k_1-k_2}{2} \bar{q} = i\tilde{s} e^{i\gamma} e^{i\omega t},$$

$$\ddot{\bar{q}}A + i\dot{\bar{q}}\omega C + \frac{h_1+h_2}{2} \dot{\bar{q}} + \frac{h_1-h_2}{2} \dot{q} + \frac{k_1+k_2}{2} \bar{q} + \frac{k_1-k_2}{2} q = -i\tilde{s} e^{-i\gamma} e^{-i\omega t}. \quad (24)$$

Випадок осесиметричного ротора вивчений у роботах [2,3]. Тому розглядові підлягає загальний випадок і випадок несиметричного ротора на симетричних опорах. Послідовність подальших досліджень описана в роботах [2,3]. Помітимо, що диференціальні рівняння руху системи (22)-(24) не залежать у явному вигляді від виду АБ, що зрівноважує ротор, а залежать – опосередковано – від осьових моментів інерції складеного ротора. Тому умови настання автобалансування в такий же спосіб будуть залежати від типу автобалансира.

Проведені дослідження дозволяють зробити такі висновки.

1. Інженерний критерій стійкості основного руху дозволив розділити задачу визначення критичних швидкостей системи ротор-АБ на дві частини. Перша частина дозволяє одержувати узагальнені критичні швидкості, як функції головних осьових моментів інерції A, B, C складеного ротора. Друга частина полягає в пошуку головних осьових моментів інерції системи, що дозволяє врахувати в явному вигляді залежність критичних швидкостей від типу АБ і дисбалансів, що зрівноважуються.

2. З огляду на те, що дисбаланс ротора й АБ порушують симетрію складеного ротора, практичний інтерес представляють загальний випадок ротора з нерухомою точкою і випадок цього ротора на симетричних опорах.

Список літератури

1. Гусаров А.А. Автобалансирующие устройства прямого действия. -М.: Наука, 2002. -119 с.
2. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами: Монографія (за спеціальністю 05.02.09 - динаміка та міцність машин). - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.
3. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів пасивними автобалансирами. Дис... доктора техн. наук 05.02.09 – Динаміка та міцність машин / Національний техн. ун-т України "Київський політехнічний інститут", Київ, 2005. – 352 с.

Ставится задача по определению условий наступления автобалансировки при уравнивании ротора с неподвижной точкой пассивным автобаланси́ром. Выводятся дифференциальные уравнения движения системы ротор-автобаланси́р. Классифицируются случаи, подлежащие рассмотрению.

A task on determination of terms of offensive of autobalancing at balancing of rotor with an immobile point is put by a passive autobalancers. Is obtained differential equations of motion of the system rotor-autobalancer. The cases subject to consideration are classified.